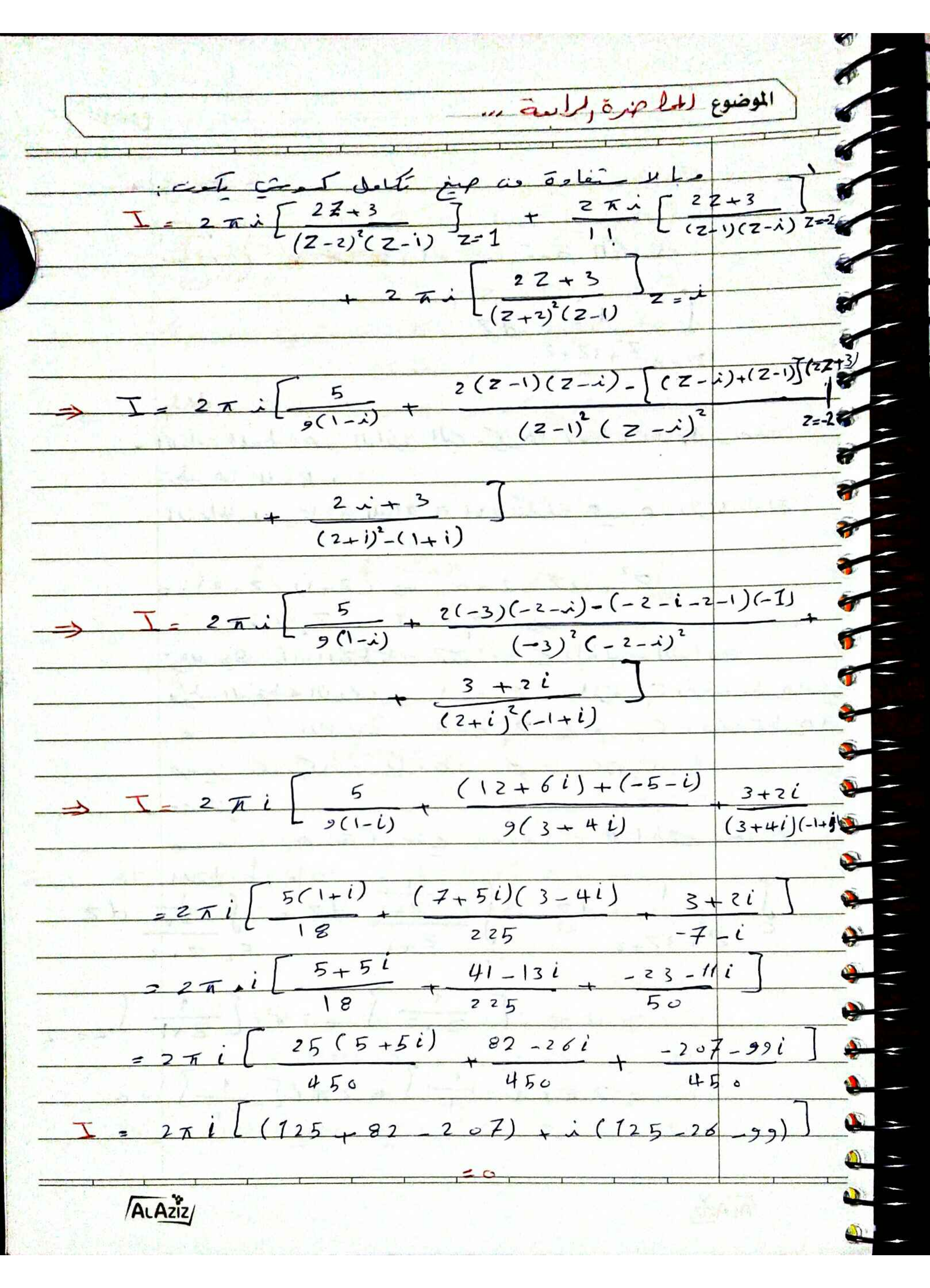


الموضوع المحاضرة الرابعة ...

وبالاستفادة من صيغ تكامل كوشي يكون:

$$I = 2\pi i\left[\frac{2z+3}{(z-2)^2(z-i)}\right]_{z=1} + \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{2z+3}{(z-1)(z-i)}\right]'_{z=-2} + 2\pi i\left[\frac{2z+3}{(z+2)^2(z-1)}\right]_{z=i}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i\left[\frac{5}{9(1-i)} + \frac{2(z-1)(z-i) - [(z-i)+(z-1)](2z+3)}{(z-1)^2(z-i)^2}\Bigg|_{z=-2} + \frac{2i+3}{(2+i)^2-(1+i)}\right]$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i\left[\frac{5}{9(1-i)} + \frac{2(-3)(-2-i) - (-2-i-2-1)(-1)}{(-3)^2(-2-i)^2} + \frac{3+2i}{(2+i)^2(-1+i)}\right]$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i\left[\frac{5}{9(1-i)} + \frac{(12+6i)+(-5-i)}{9(3+4i)} + \frac{3+2i}{(3+4i)(-1+i)}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{5(1+i)}{18} + \frac{(7+5i)(3-4i)}{225} + \frac{3+2i}{-7-i}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{5+5i}{18} + \frac{41-13i}{225} + \frac{-23-11i}{50}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{25(5+5i)}{450} + \frac{82-26i}{450} + \frac{-207-99i}{450}\right]$$

$$I = 2\pi i\left[(125+82-207) + i(125-26-99)\right]$$

$$= 0$$

AlAziz

الموضوع

* ملاحظة :

مثال : أحسب قيمة التكامل :

$$\int_{|Z|=4} \frac{1}{Z^2+3Z+2}\, dZ = 0$$

الحل :

- الالتفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=4$.

- النقاط الشاذة للدالة المتكاملة هي جذور المعادلة :

$$Z^2+3Z+2=0 \Rightarrow (Z+1)(Z+2)=0$$

$$\Rightarrow Z_1=-1 \;,\; Z_2=-2$$

ونلاحظ بأن النقطتان تقعان في داخلية الالتفاف .

نحيط النقطة الأولى $Z_1=-1$ بدائرة C_1 نصف قطرها صغير

" " الثانية $Z_2=-2$ " C_2 نصف قطرها

صغير بقدر كافٍ ليكون : $C_1 \cap C_2 = \phi$

، عندئذٍ :

حسب مبرهنة كوشي - جورسات للمناطق متعددة الترابط فإن :

$$\int_C \frac{1}{Z^2+3Z+2}\, dZ = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{Z+2}}{Z+1}\, dZ + \int_{C_2} \frac{\frac{1}{Z+1}}{Z+2}\, dZ$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{Z+2}\right] + 2\pi i \left[\frac{1}{Z+1}\right]_{Z=-2}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{1}\right] + 2\pi i \left[\frac{1}{-1}\right] = 0$$

الموضوع

* قاعدة : ✱✱ .

- إذا كان لدينا تكامل من الشكل التالي :

$$\int_C \frac{p(z)}{q(z)} \, dz$$

حيث كل من $p(z)$ و $q(z)$

عبارة عن كثيرة حدود . وكانت درجة المقام أكبر من درجة

البسط بدرجتان وما فوق .

وكانت جميع أصفار جذور المعادلة $q(z)=0$ تقع في

داخلية c .

عندئذٍ :

تكون قيمة التكامل تساوي الصفر دوماً .

مثال : $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{\sin z}{(z+1)(z-3)} \, dz \neq 0$

حيث $\neq 0$ لأن قيمة البسط ليست كثيرة حدود .

أما :

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-3)} \, dz \neq 0$$

لأن البسط ليس

كثيرة حدود .

* ملاحظة : حيث يمكننا تطبيق القاعدة على الأمثلة سابقة

أسهل وأسرع ، ويمكن استخدامها .

ملاحظة :

- لتكن f دالة تحليلية على النطاق D .

ولتكن z_0 نقطة ثابتة من هذا النطاق ،

ولتكن z نقطة تتغير في هذا النطاق .

لنصل بين z_0 ، z بمنحنيين مختلفين الأول c_1 والثاني c_2 .

AL AZIZ

عندئذٍ:

الكفافين C_1 و $-C_2$ يشكلان كفاف مغلق وبسيط.
ولنرمز لنقاط هذا الكفاف بـ B.
وبالتالي اعتماداً على مبرهنة كوشي جورسات للمناطق البسيطة الترابط يكون:

$$\int_B f(s).\,ds = 0$$

حيث: B هو C_1 و $-C_2$.

واعتماداً على خواص التكامل فإن:

$$\int_{C_1} f(s).\,ds + \int_{-C_2} f(s).\,ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(s).\,ds = -\int_{-C_2} f(s).\,ds$$

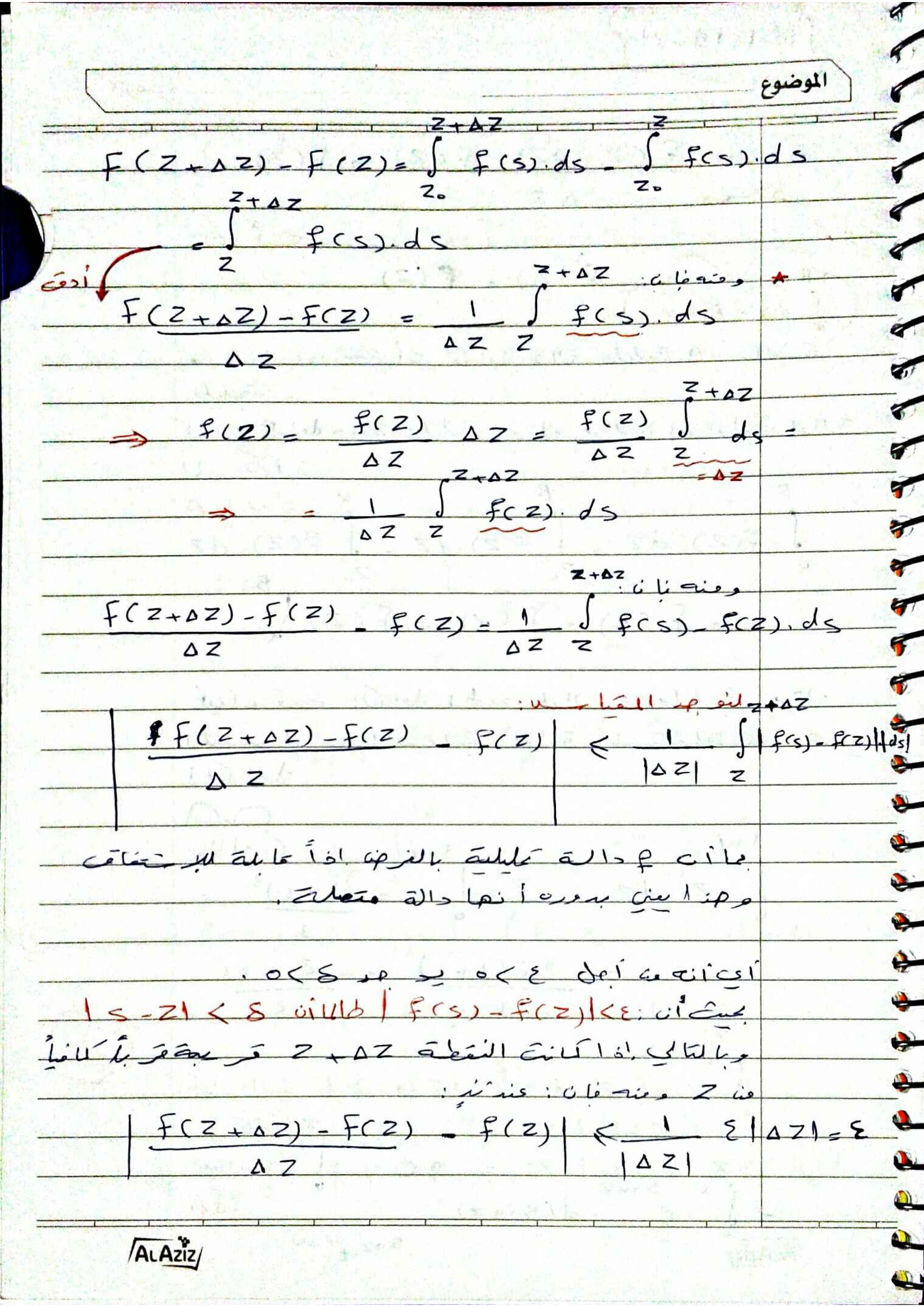
$$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} f(s).\,ds = \int_{z_0}^{z} f(s).\,ds$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج أولاً أن:
قيمة تكامل دالة تحليلية لا تتغير بتغير المسار الذي يصل بين نقطة البداية والنهاية.

وهذا يعني أن التكامل $\int_{z_0}^{z} f(s).\,ds$.
يعرف لنا دالة متغيرها هو الحد العلوي للتكامل.
أي أن:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s).\,ds$$

- لنبين الآن أن $F(z)$ دالة تحليلية أي أن $F(z)$ قابلة للاشتقاق $F'(z) = f(z)$
من أجل ذلك:



الموضوع

$$F(Z+\Delta Z) - F(Z) = \int_{Z_0}^{Z+\Delta Z} f(s).ds - \int_{Z_0}^{Z} f(s).ds$$

$$= \int_{Z}^{Z+\Delta Z} f(s).ds$$

أدق

★ وهنا فإن:

$$\frac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} = \frac{1}{\Delta Z} \int_{Z}^{Z+\Delta Z} f(s).ds$$

$$\Rightarrow \quad f(Z) = \frac{f(Z)}{\Delta Z}\,\Delta Z = \frac{f(Z)}{\Delta Z} \underbrace{\int_{Z}^{Z+\Delta Z} ds}_{=\Delta Z} =$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{\Delta Z} \int_{Z}^{Z+\Delta Z} f(Z).ds$$

ومنه بأن:

$$\frac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} - f(Z) = \frac{1}{\Delta Z} \int_{Z}^{Z+\Delta Z} f(s) - f(Z).ds$$

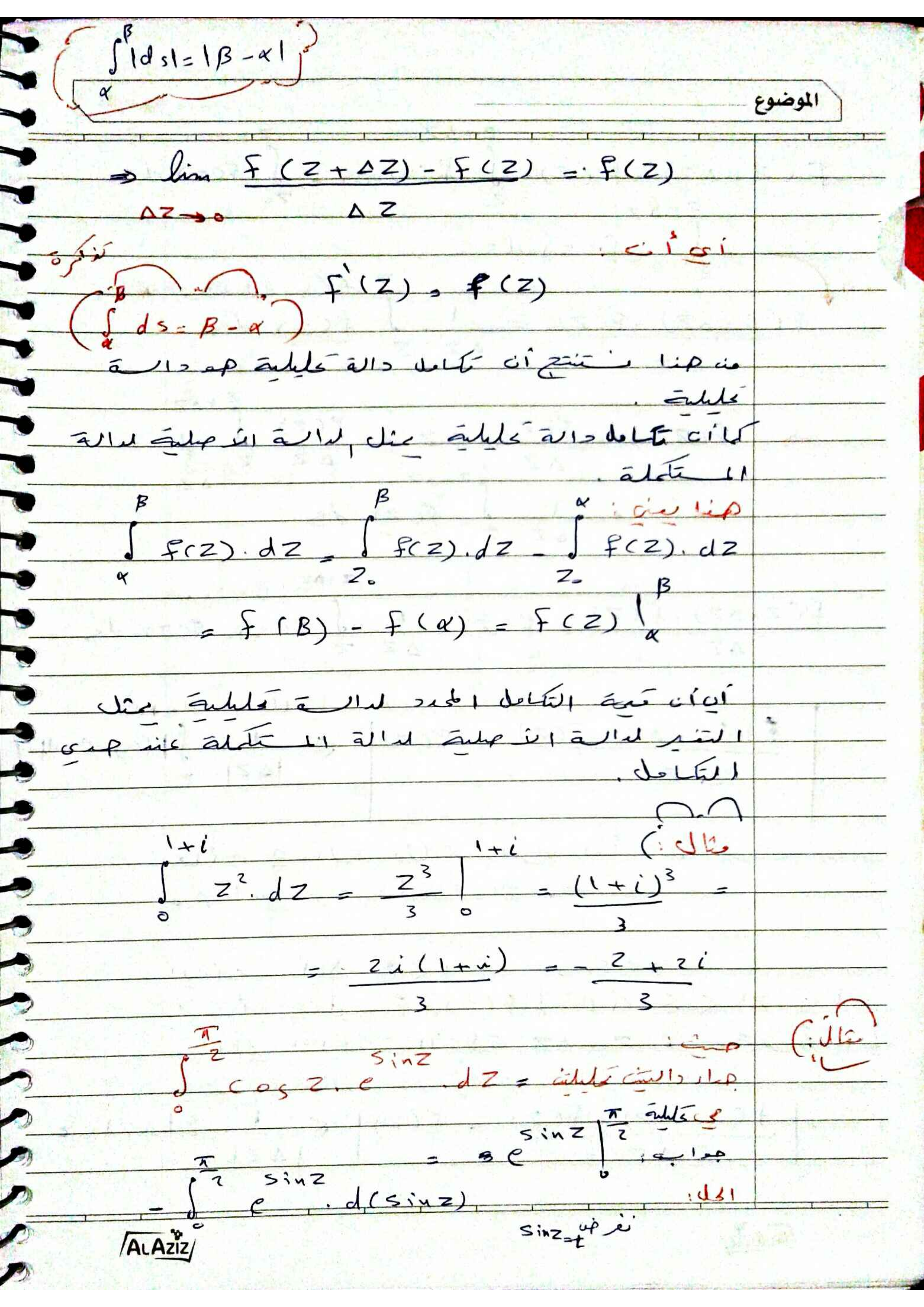
بأخذ القياس:

$$\left| \frac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} - f(Z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta Z|} \int_{Z}^{Z+\Delta Z} |f(s) - f(Z)|\,|ds|$$

بما أن f دالة تحليلية بالفرض إذاً قابلة للاشتقاق
وهذا يعني بدوره أنها دالة متصلة.

إذاً نه لأجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$.
بحيث أن: $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ طالما $|s - z| < \delta$
وبالتالي إذا كانت النقطة $Z + \Delta Z$ قريبة قرباً كافياً
من Z ومنه فإن: عندئذٍ:

$$\left| \frac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} - f(Z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta Z|}\,\varepsilon\,|\Delta Z| = \varepsilon$$



$\int_\alpha^\beta |ds| = |\beta - \alpha|$

الموضوع

$$\Rightarrow \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} = f(Z)$$

أي أن:

تذكرة: $\left(\int_\alpha^\beta ds = \beta - \alpha\right)$

$$F'(Z) \text{ ، } f(Z)$$

من هنا نستنتج أن تكامل دالة تحليلية هو دالة تحليلية.

كما أن تكامل دالة تحليلية يمثل الدالة الأصلية للدالة المتكاملة.

هذا يعني:

$$\int_\alpha^\beta f(Z).dZ = \int_{Z_0}^\beta f(Z).dZ - \int_{Z_0}^\alpha f(Z).dZ$$

$$= F(\beta) - F(\alpha) = F(Z)\Big|_\alpha^\beta$$

أي أن قيمة التكامل المحدد لدالة تحليلية يمثل التغير لدالة الأصلية لدالة المتكاملة عند حدي التكامل.

مثال:

$$\int_0^{1+i} Z^2.dZ = \frac{Z^3}{3}\Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} =$$

$$= \frac{2i(1+i)}{3} = \frac{-2+2i}{3}$$

مثال:

احسب:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos Z . e^{\sin Z} . dZ =$$

جداء دالتين تحليليتين هي تحليلية

جواب: $= e^{\sin Z}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

الحل: $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin z} . d(\sin z)$

نفرض $\sin z = t$

ALAZIZ

الموضوع

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{t}\,dt \Rightarrow -\left[e^{t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[e^{\frac{\pi}{2}} - e^{0}\right]$$

$$= -\left[e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right] =$$

★ مبرهنة القيمة العظمى لمقاييس الدوال:

- لتكن f دالة تحليلية وغير ثابتة القيمة على ~~القرص~~ القرص الدائري $|z - z_0| < r_0$.

ولتكن z نقطة من داخلية هذا القرص ولنرمز بـ c_1 لدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r_1 وبحيث أن $|z - z_0| = r_1$ وبحيث أن $r_1 < r_0$.

عندئذٍ:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

حيث: $z - z_0 = r_1 e^{i\theta}$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r_1 e^{i\theta})\, i\, r_1 e^{i\theta}}{r_1 e^{i\theta}}\,d\theta$$

① $$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r_1 e^{i\theta})\,d\theta$$

② $$\Rightarrow |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})|\,d\theta$$

وهذه المتراجحة محققة في الحالة الخاصة عندما $r_1 = 0$

- لنفرض جدلاً أن: $|f(z)| \le |f(z_0)|$

$$\Rightarrow |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})| \le |f(z_0)|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})|\,d\theta \le |f(z_0)|$$

الموضوع

② $\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})|\, d\theta \leq |f(z_0)|$

من 1 و 2) نستنتج أن:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})|\, d\theta$$

$$= 2\pi |f(z_0)| = \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})|\, d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(z_0)|\, d\theta = \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})|\, d\theta$$

ومنه فإن:

$$\int_0^{2\pi} \left(|f(z_0)| - |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})|\right) d\theta = 0$$

بما أن الدالة المتكاملة هي موجبة ودالة متصلة عندئذٍ نستنتج أن: $|f(z_0)| - |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})| = 0$

$$|f(z_0)| = |f(z)|$$

هنا يعني لنا بأن الدالة f دالة ثابتة القيمة. وهكذا في هذا يناقض الفرض الأصلي لأن f تحليلية وغير ثابتة القيمة إذاً الفرض الجدلي خاطئ. مما أي أن:

$$|f(z)| > |f(z_0)|$$

واستناداً إلى ملاحظة سابقة في فقرة الاستقرار نستنتج بأن الدالة f تبلغ قيمتها العظمى على «محيط الدائرة» وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة الآتية.

الموضوع

★ مبرهنة: إذا كانت الدالة f متصلة على الالتفاف المغلق والبسيط C، وتحليلية عند كل نقطة من نقاط داخلية C. عندئذ:
الدالة f تبلغ قيمتها العظمى عند نقاط تقع على المحيط وليس في داخلية هذا الالتفاف.

★ مثال: لتكن لدينا الدالة:

$$f(z) = z^3 + 4z^2 - z$$

- عين النقاط من القرص الدائري $|z| \leq 1$ والتي تبلغ عندها الدالة قيمتها العظمى.

★ الحل:

حل الكلام ← الدالة كثيرة حدود من درجة الثالثة فهي دالة شاملة أي تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي، أي أنها تحليلية في النقاط التي تقع في داخلية دائرة الوحدة.
- بما أنها تحليلية فهي قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي.
وهذا يعني بأنها مستمرة عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي.
أي مستمرة عند النقاط $|z| = 1$.

حسب مبرهنة القيم العظمى فإن الدالة تبلغ قيمتها العظمى على محيط القرص وليس عند أية نقطة من نقاط داخليته.
أي: $|z| = 1$

$$z = e^{i\theta} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

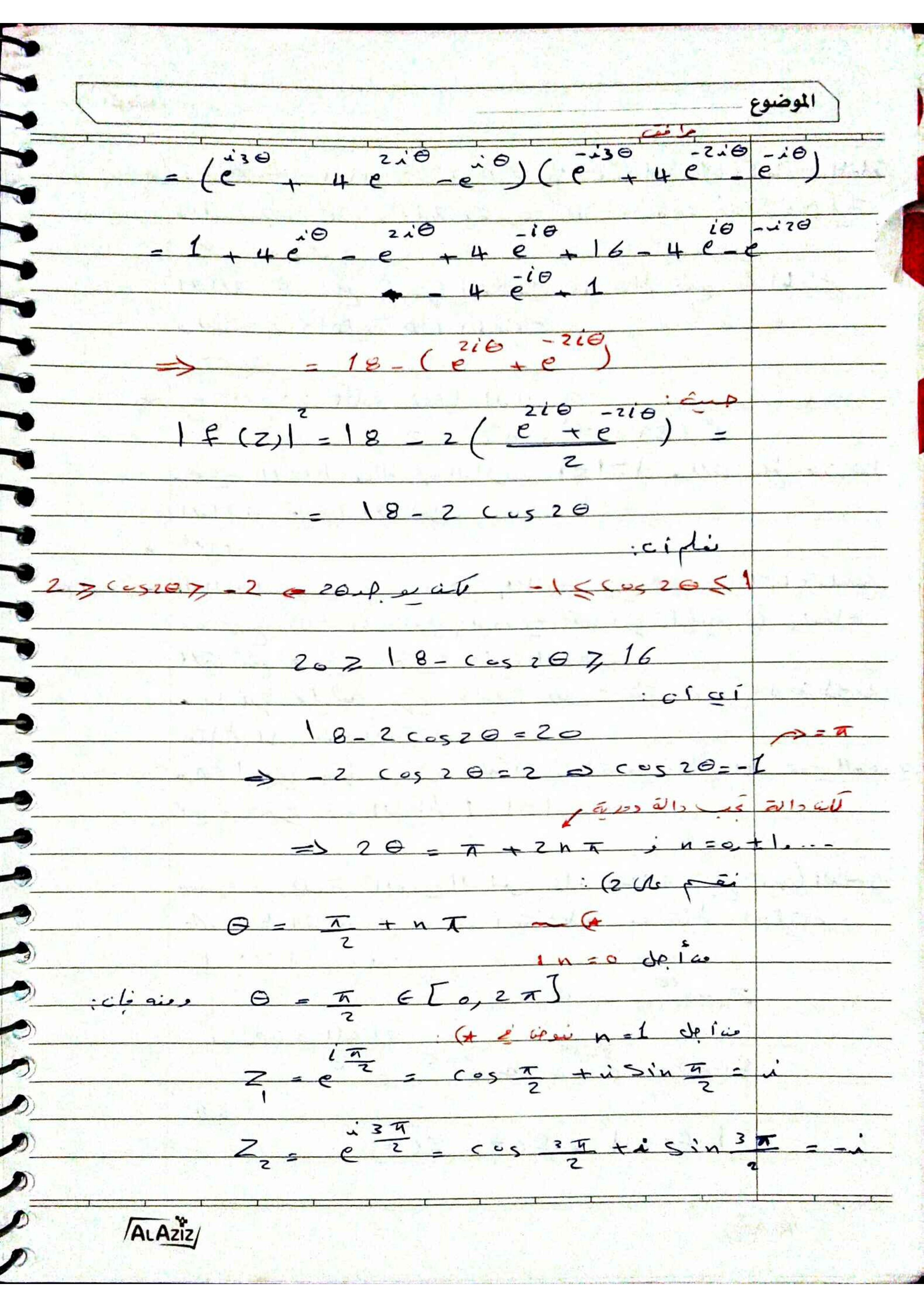
نعوض في المعادلة:

$$f(z) = e^{3i\theta} + 4e^{2i\theta} - e^{i\theta}$$

لكن:

$$|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$$

ALAZIZ



الموضوع

مرافق

$$= (e^{i3\theta} + 4e^{2i\theta} - e^{i\theta})(e^{-i3\theta} + 4e^{-2i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= 1 + 4e^{i\theta} - e^{2i\theta} + 4e^{-i\theta} + 16 - 4e^{i\theta} - e^{-i2\theta}$$
$$- 4e^{-i\theta} + 1$$

$$\Rightarrow \quad = 18 - (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})$$

حيث:

$$|f(z)|^2 = 18 - 2\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) =$$

$$= 18 - 2\cos 2\theta$$

نعلم:

$-1 \le \cos 2\theta \le 1$ تكافئ بضرب بـ -2 ⇐ $2 \ge \cos 2\theta \ge -2$

$$20 \ge 18 - \cos 2\theta \ge 16$$

أي أن:

$$18 - 2\cos 2\theta = 20 \qquad \Rightarrow = \pi$$

$$\Rightarrow -2\cos 2\theta = 2 \Rightarrow \cos 2\theta = -1$$

لأن دالة تجب دالة دورية

$$\Rightarrow 2\theta = \pi + 2n\pi \; ; \; n = 0, \pm 1, \ldots$$

نقسم على 2:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \leftarrow (*)$$

من أجل $n = 0$،

ومنه فإن: $\theta = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi]$

من أجل $n = 1$ نعوض في $(*)$:

$$Z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$Z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$